

Fading

Compensazione con controllo automatico della potenza (oggetti fermi o in moto lento, max 20 Km/h)

Dovuto al fenomeno di multipath (presenza di più cammini, detti raggi, tra il trasmettitore ed il ricevitore).

Segnale al ricevitore: somma di N segnali, ciascuno con la propria ampiezza e la propria fase (dominio della frequenza), o il proprio ritardo di propagazione (dominio del tempo).

Per un utente posto in posizione x , il contributo alla tensione ricevuta da ogni raggio ha ampiezza $V_i(x)$ e fase $\phi_i(x)$.

La tensione ricevuta totale è:

$$V(x) = \sum_{i=1}^N V_i(x) \cdot e^{j\phi_i(x)}$$

Fading

Valutiamo quali sono le variazioni sulla tensione ricevuta dovute del fading.

Su distanze dell'ordine di una lunghezza d'onda:

- ampiezze dei raggi praticamente costanti
- fasi molto variabili

$$\phi_i(x) = -k \cdot L_i = -(2\pi / \lambda) \cdot L_i$$

al variare della posizione x dell'utente, le lunghezze L_i dei percorsi variano in maniera differente l'una dall'altra, con velocità di variazione differente, dando luogo a relativi cambi di fase fra i raggi, e causando rapide variazioni di ampiezza (fast fading) nel segnale ricevuto $V(x)$

Fading

Media spaziale della potenza ricevuta (dominio dell'ordine di qualche metro, ossia decine di lunghezze d'onda):

$$\langle P(x) \rangle = \langle V^2(x) \rangle = \left\langle \sum_{i,j}^N V_i(x) \cdot V_j(x) \cdot e^{j[\phi_i(x) - \phi_j(x)]} \right\rangle$$

Supponendo costanti le ampiezze dei raggi posso portarle fuori dalla media spaziale:

$$\langle P(x) \rangle = \sum_{i,j}^N V_i(x) \cdot V_j(x) \cdot \langle e^{j[\phi_i(x) - \phi_j(x)]} \rangle$$

La media si riduce al solo termine esponenziale (segnale ricevuto dopo aver filtrato il fast-fading).

Per raggi che arrivano all'utente da diverse direzioni, la differenza di fase potrà subire variazioni superiori a $2\pi \rightarrow$ le medie spaziali dei singoli termini esponenziali saranno piccole per $i \neq j$, e unitarie per $i = j$

Fading

Quindi:

$$\left\langle e^{j[\varphi_n(x) - \varphi_m(x)]} \right\rangle = \delta_{n,m} \quad \longrightarrow \quad \langle P(x) \rangle = \sum_{i=1}^N [V_i(x)]^2$$

La potenza media in una piccola area attorno al ricevitore è la somma delle potenze associate ai singoli raggi.

La media non varia significativamente su distanze di qualche lunghezza d'onda.

Anche le ampiezze $V_i(x)$ dei singoli raggi sono pressoché costanti su distanze dell'ordine della lunghezza d'onda, così come abbiamo supposto.

Il segnale filtrato dal fast fading è la somma delle potenze associate a ciascun raggio e quindi varia su scale di decine di metri (la scala di variazione è la stessa dell'ampiezza di ciascun raggio).

Fast Fading

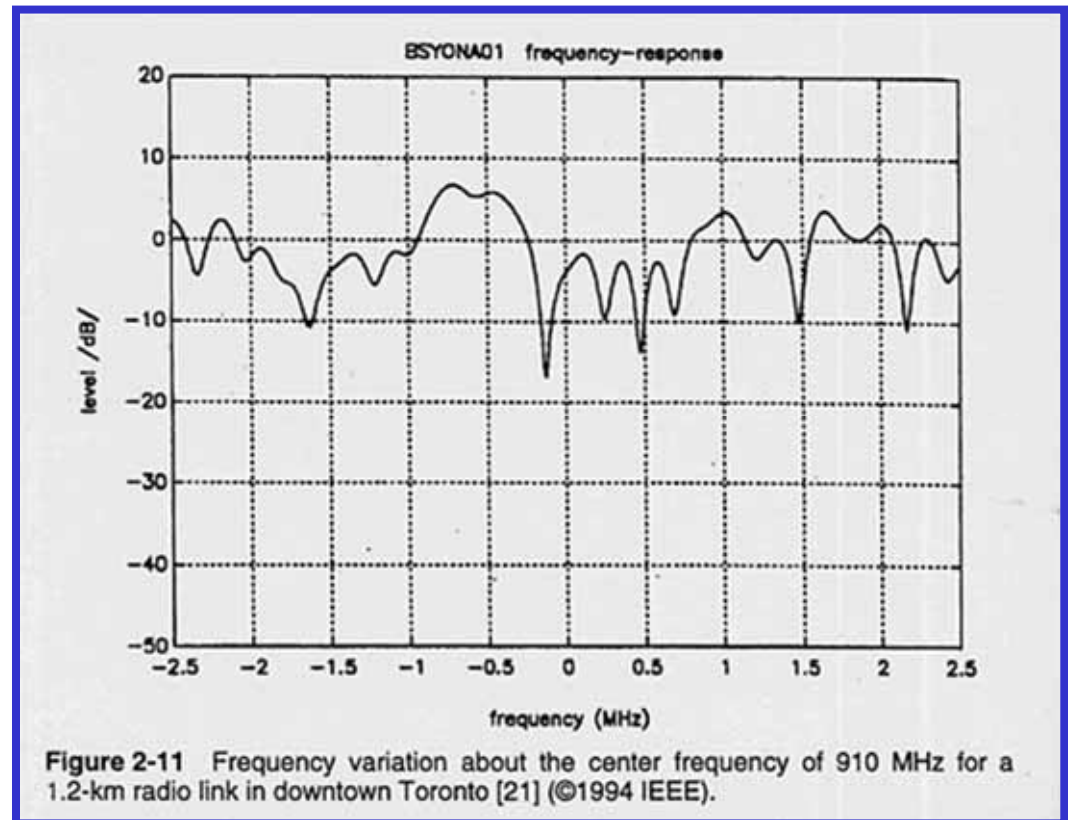
Frequency fading: la fase di ogni singolo raggio che arriva al ricevitore dipende dalla frequenza attraverso il termine $k \cdot L_n$, quindi le fasi relative dei raggi con differenti cammini L_n varieranno con la frequenza.

Di conseguenza l'ampiezza del segnale ricevuto varierà anche essa con la frequenza.

Detti L_i ed L_j due diversi percorsi, la variazione di fase sul segnale ricevuto è:

$$\phi_i - \phi_j = (L_i - L_j) \cdot \frac{2\pi f}{c}$$

Per collegamenti outdoor le differenze fra i cammini possono arrivare al Km, quindi la differenza di fase $\phi_i - \phi_j$ può raggiungere 2π con una variazione di frequenza di 0.3 MHz.

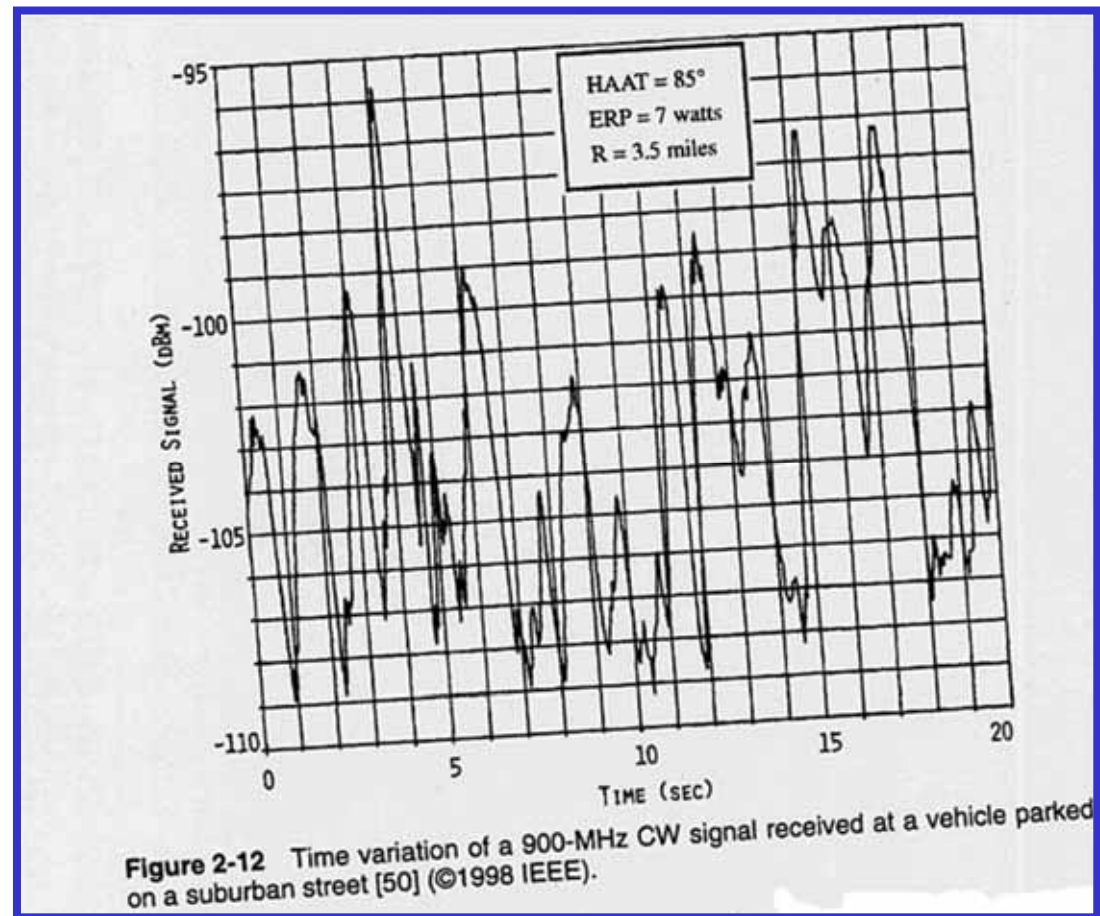


Fast Fading

Time-dependent fading: il percorso L_n di ogni singolo raggio che arriva al ricevitore rappresenta la distanza totale percorsa dal segnale per giungere dalla RBS al ricevitore, attraverso le varie riflessioni e/o diffusiioni dovute agli ostacoli incontrati lungo il cammino.

Gli ostacoli non sono necessariamente fermi (veicoli, pedoni, alberi mossi dal vento) ed il loro moto causa una variazione nella lunghezza del percorso L_n anche quando l'utente ricevente è fermo.

La variazione dei percorsi L_n provoca la variazione delle fasi $\phi_n = k \cdot L_n$ dei vari contributi al segnale totale ricevuto, che quindi varieranno nel tempo causando una variazione di ampiezza del segnale ricevuto.



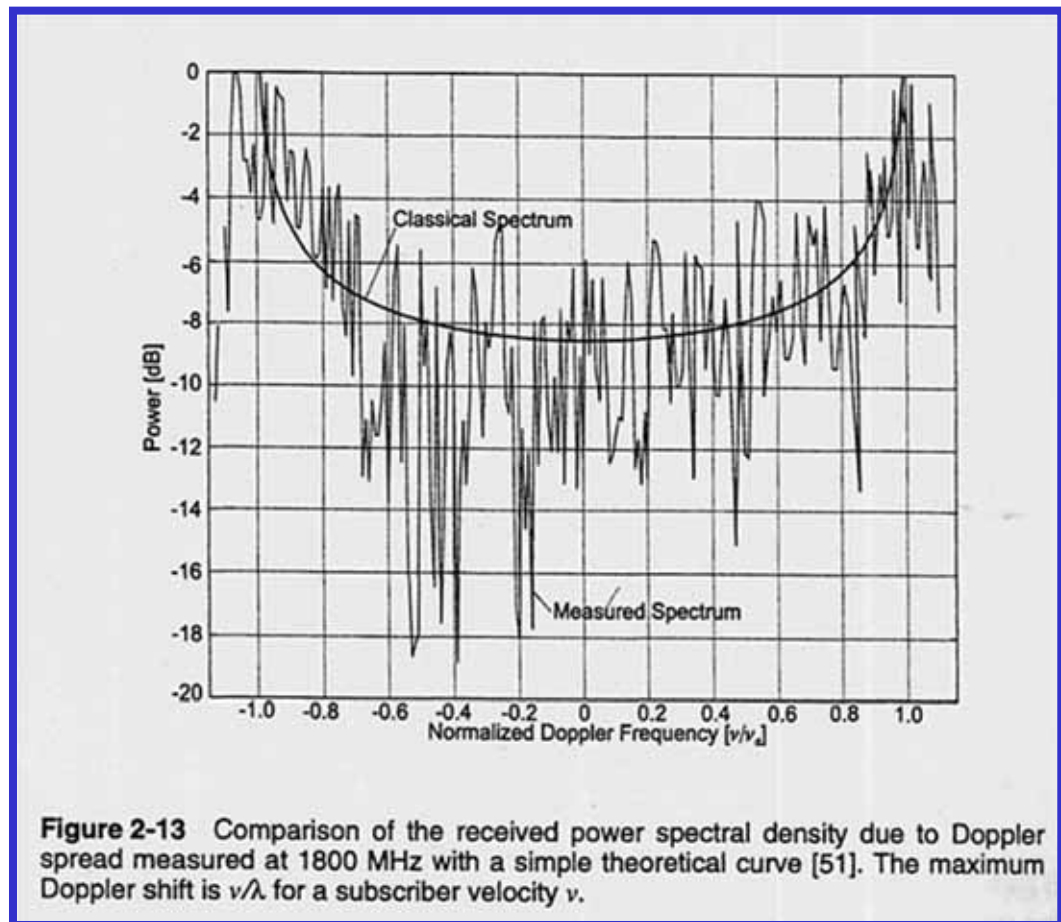
Fast Fading

Doppler Spread: Quando l'utente è in movimento, ci sarà una variazione costante della fase ϕ_n , il cui tasso di variazione è dato da $-k(dL_n/dt)$.

La variazione rispetto al tempo di ϕ_n è causa di una variazione in frequenza (effetto Doppler) pari a: $\Delta f = -(f/c) \cdot (dL_n/dt)$

Se l'utente si sta spostando in direzione opposta a quella del raggio con velocità v , il cambiamento in frequenza dovuto al doppler è pari a $+v \cdot f/c$.

Se lo spostamento avviene nella stessa direzione dei raggi il cambiamento in frequenza dovuto al doppler è pari a $-v \cdot f/c$.



Fast Fading

Per i raggi che formano un angolo θ con il vettore velocità dell'utente mobile, il cambiamento in frequenza dovuto al doppler è pari a $-v \cdot f / c \cdot \cos\theta$.

Il risultato di questo effetto Doppler, che agisce su ogni singolo raggio modificandone la fase, è che il segnale ricevuto si diffonde su una banda di frequenze di ampiezza proporzionale alla velocità dell'utente

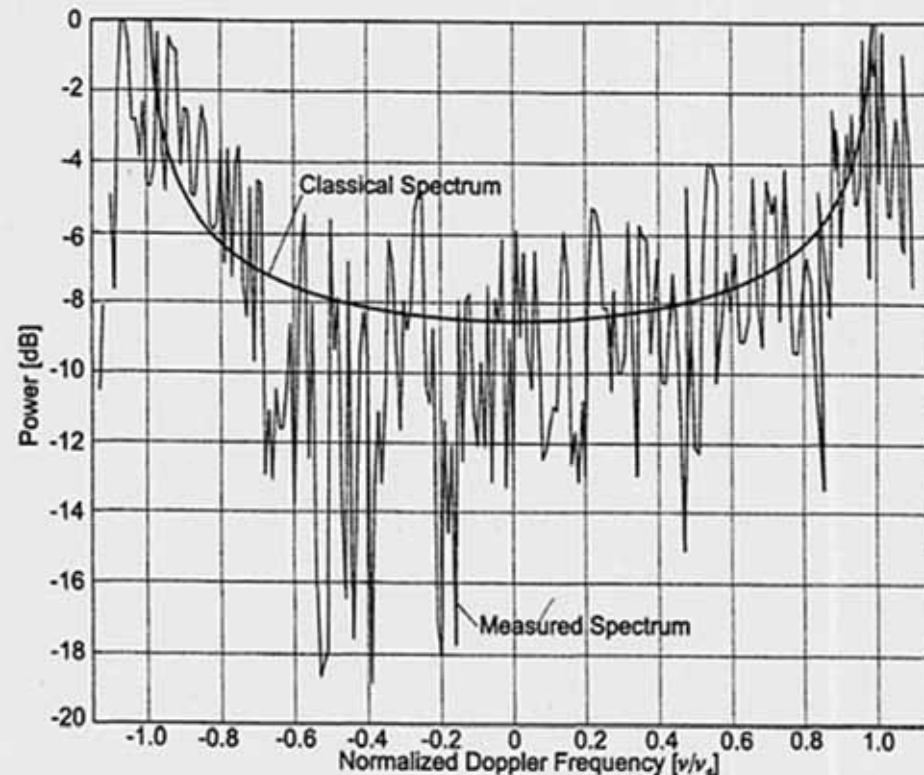


Figure 2-13 Comparison of the received power spectral density due to Doppler spread measured at 1800 MHz with a simple theoretical curve [51]. The maximum Doppler shift is v/λ for a subscriber velocity v .

Fast Fading

Le formule empiriche per l'attenuazione (Hokumura-Hata), forniscono la mediana dell'attenuazione ossia il valore di attenuazione che viene superato (o non viene superato) con probabilità $\frac{1}{2}$.

Per una variabile gaussiana media e mediana coincidono.

Per una variabile di tipo Rayleigh (collegamento NLOS) la mediana è diversa dalla media.

$$\text{MEDIA :} \quad \langle r \rangle = \int_0^{\infty} r \cdot PDF(r) dr = \int_0^{\infty} r \cdot \frac{r}{\rho^2} e^{-\frac{r^2}{2\rho^2}} dr = \rho \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cong 1.25\rho$$

$$\text{MEDIANA :} \quad F(r_0) = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - e^{-\frac{r_0^2}{2\rho^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow r_0 = \rho\sqrt{2} \cdot \ln 2 = 0.98\rho$$

Quindi ρ è circa pari alla mediana della variabile di Rayleigh.

Fast Fading

Valutiamo il livello del segnale ricevuto che viene superato con affidabilità del 99% (fuori servizio massimo dell'1%) per una v.a con pdf di Rayleigh.

Devo trovare qual è il livello del segnale ricevuto che viene comunque superato per l'1% del tempo:

$$F(r_0) = 1\% \Rightarrow 1 - e^{-\frac{r^2}{2\rho^2}} = 0.01$$

$$\Rightarrow r_0 = 0.14177\rho$$

$$\Rightarrow r_{0_dB} = 20\log_{10}(0.14177\rho) = -17dB + \rho_{dB}$$

Il valore corrispondente è 17dB sotto la mediana (che vale circa ρ).

Rispetto al valore mediano del segnale, a causa del fading, possono esserci attenuazioni del segnale anche di 17dB, che è un valore molto grande.

Fast Fading

Per compensare questo effetto aumentando la potenza in trasmissione, si dovrebbe moltiplicare la potenza per quasi 100 volte (17dB), il che è inaccettabile.

Occorre una strategia che consenta di compensare questi effetti di fading, che si basa sul fatto che si possono ottenere più campioni dello stesso segnale tra loro incorrelati ed elaborarli opportunamente

Infatti, se uno dei segnali ricevuti da un certo cammino è molto basso a causa del fading, qualche altro sarà necessariamente più alto.

Vediamo quindi come è possibile ottenere campioni di segnale fra loro incorrelati, e come si possono elaborare questi campioni per combattere il fenomeno del fast fading.

Correlazione del Fast Fading: Downlink

Mezzo mobile in fase di downlink: segnale ricevuto somma di onde piane che arrivano da direzioni diverse e percorrendo cammini diversi.

$$E_i(z) = \sum A_n e^{j\phi_n} e^{-jkz \cos \theta_n} \qquad V(z) \propto |E_i(z)|$$

Tensione (a vuoto) ricevuta proporzionale ad E_i

Studiamo la correlazione di $V(z)$, ossia quanto la conoscenza del segnale in un certo punto dello spazio consente di prevedere il valore del segnale in un altro punto.

Correlazione zero: conoscere un punto non fornisce alcuna informazione sull'altro punto, i due valori sono indipendenti.

Correlazione del Fast Fading: Downlink

Valutiamo, rispetto ad uno spostamento z del ricevitore mobile, la correlazione di $E_i(z)$.

In downlink, le onde arriveranno al terminale un po' da tutte le direzioni, quindi la direzione in cui avviene lo spostamento è indifferente.

$$E_i(z) = V(z)e^{j\psi(z)}$$

L'espressione precedente per il campo elettrico può essere utilizzata per ricavare la funzione di autocorrelazione per il segnale, e da essa la lunghezza di correlazione per il fading quando l'utente è in movimento.

La autocorrelazione è definita come $[2W \gg s]$ è la distanza sulla quale il campo è noto, p.es perché è stato misurato]:

$$C(s) = \frac{1}{2W} \int_{-W}^W E_i(z) \cdot E_i^*(z-s) dz$$

Correlazione del Fast Fading: Downlink

Sostituendo nella precedente l'espressione dei campi, e utilizzando indici differenti per la sommatorie relative a ciascun campo, si ha (portando fuori dall'integrale i termini costanti rispetto a z):

$$C(s) = \sum_i \sum_j V_i \cdot V_j \cdot e^{j(\phi_i - \phi_j)} \cdot e^{-jk \cdot s \cdot \sin \vartheta_j} \cdot \frac{1}{2w} \int_{-w}^w e^{-jk \cdot z \cdot (\sin \vartheta_i - \sin \vartheta_j)} dz$$

Svolgendo l'integrale dell'esponenziale si ottiene quindi:

$$C(s) = \sum_i \sum_j V_i \cdot V_j \cdot e^{j(\phi_i - \phi_j)} \cdot e^{-jk \cdot s \cdot \sin \vartheta_j} \cdot \frac{\sin[k \cdot w \cdot (\sin \vartheta_i - \sin \vartheta_j)]}{k \cdot w \cdot (\sin \vartheta_i - \sin \vartheta_j)}$$

Correlazione del Fast Fading: Downlink

$$C(s) = \sum_i \sum_j V_i \cdot V_j \cdot e^{j(\phi_i - \phi_j)} \cdot e^{-jk \cdot s \cdot \sin \vartheta_j} \cdot \frac{\sin[k \cdot w \cdot (\sin \vartheta_i - \sin \vartheta_j)]}{k \cdot w \cdot (\sin \vartheta_i - \sin \vartheta_j)}$$

Se w è grande rispetto alla lunghezza d'onda, allora $k \cdot w \gg 1$ e la funzione *sinc* che rappresenta il valore dell'integrale sarà molto piccola, tranne che per $i=j$, e quindi la precedente si riduce a:

$$C(s) = \sum_i V_i^2 \cdot e^{-jk \cdot s \cdot \sin \vartheta_i}$$

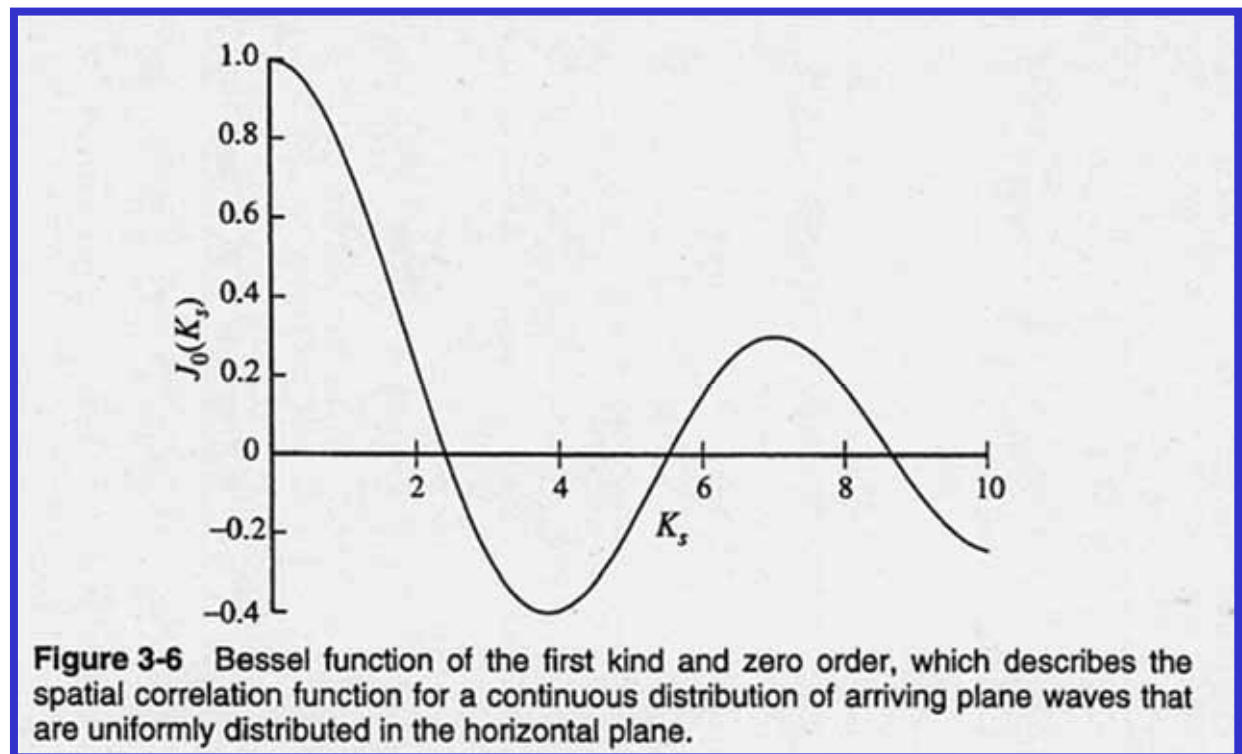
La espressione classica in forma chiusa per la autocorrelazione è ottenuta passando da angoli di arrivo discreti ad una distribuzione continua sostituendo la sommatoria con una integrazione sull'angolo di arrivo θ .

Correlazione del Fast Fading: Downlink

Assumendo che le ampiezze V_i siano le stesse per tutte le direzioni di propagazione, e siano per semplicità tutte unitarie, si ottiene:

$$C(s) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jk \cdot s \cdot \sin \theta} d\theta = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \cos(k \cdot s \cdot \sin \theta) d\theta = J_0(k \cdot s)$$

Nella precedente, J_0 è la funzione di Bessel di ordine zero.



Correlazione del Fast Fading: Downlink

La $J_0(x)$ parte da uno e poi ha un andamento simile ad senoide che si attenua con la radice di x .

Questo modello afferma che la correlazione è molto forte se s è piccolo, e diventa sempre più piccola man mano che s diventa paragonabile alla lunghezza d'onda.

Il primo zero di tale funzione si ha per $k|s|=2.4$.

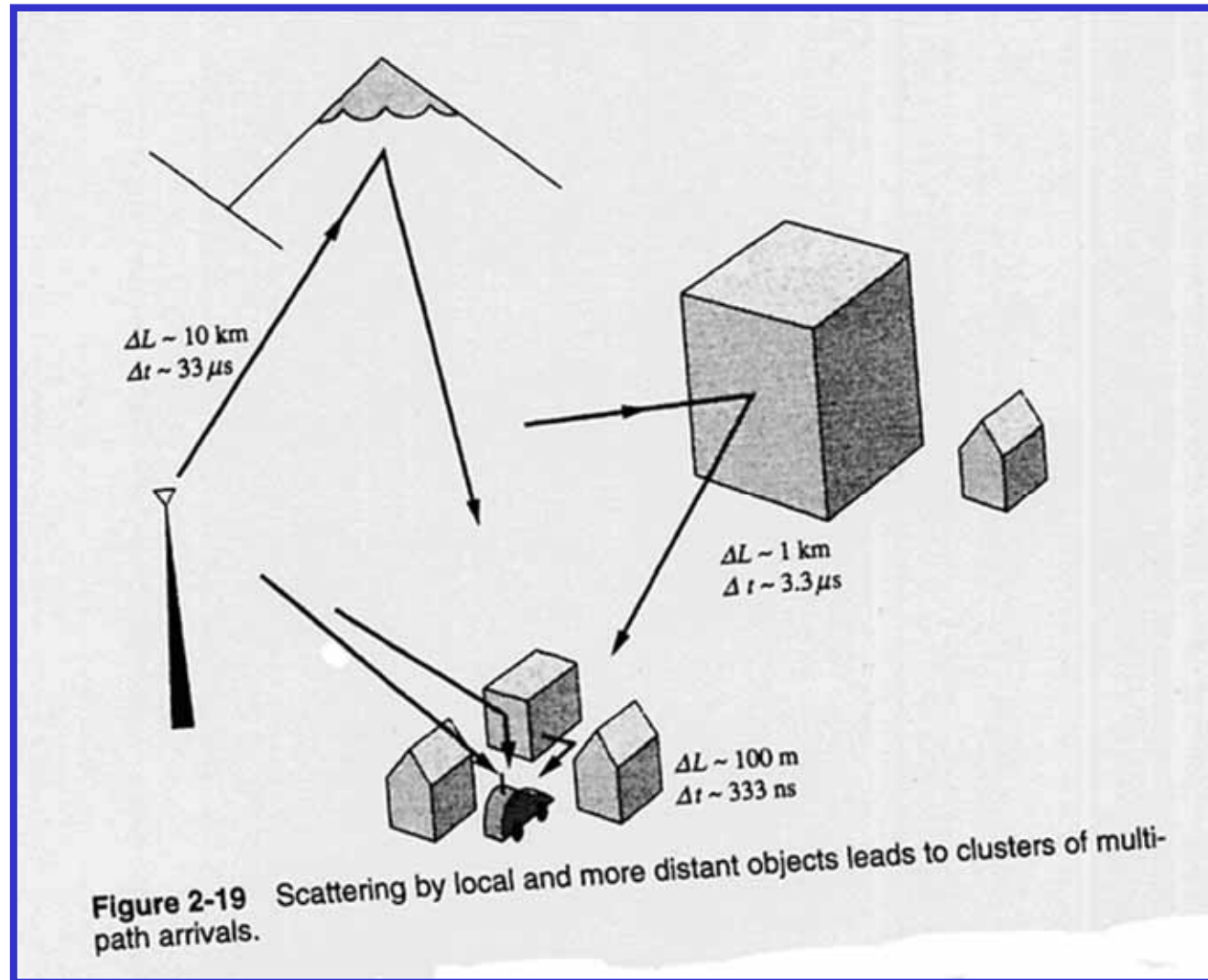
Dopo tale valore $|C(s)| < 0.5$, quindi i campi nei punti z e $z+s$ possono essere considerati non più correlati.

Ricordando che $k=2\pi/\lambda$, il pattern del fast fading appare decorrelato per $|s|>0.4\lambda$, come è stato osservato nelle misurazioni di campo effettuate.

Ma il modello è approssimato, e ad esempio per 0.55λ la correlazione è opposta ma è comunque elevata.

Correlazione del Fast Fading: Uplink

Utente che trasmette verso RBS in posizione elevata: alle antenne della RBS arriveranno segnali da cammini multipli.

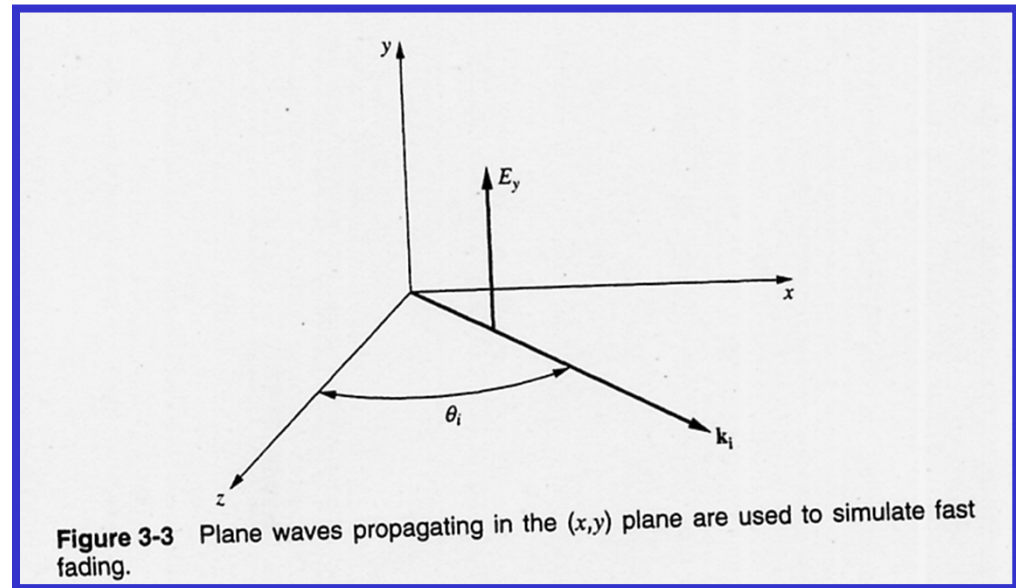


Correlazione del Fast Fading: Uplink

Per stimare la scala di variazione del fading, supponiamo che le onde arrivino alla RBS lungo un fascio angolare abbastanza stretto: $-\theta_{\max} < \theta < \theta_{\max}$ attorno all'asse z .

Se le direzioni dei raggi sono uniformemente distribuite in questo sottile intervallo angolare, l'autocorrelazione assume la stessa forma vista in precedenza, e la sua variazione rispetto alla posizione s dell'utente mobile è data da:

$$C(s) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\theta_{\max}}^{\theta_{\max}} e^{-jk \cdot s \cdot \sin \theta} d\theta$$



Correlazione del Fast Fading: Uplink

Essendo il fascio angolare stretto, possiamo approssimare nella precedente $\sin\theta \cong \theta$, da cui:

$$C(s) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\theta_{\max}}^{\theta_{\max}} e^{-jk \cdot s \cdot \sin\theta} d\theta \cong \frac{\sin(k \cdot s \cdot \theta_{\max})}{k \cdot s \cdot \theta_{\max}} = \text{sinc}(k \cdot s \cdot \theta_{\max})$$

La funzione di correlazione ha il suo primo zero quando:

$$k \cdot s \cdot \theta_{\max} = \pi \rightarrow s = \lambda / 2\theta_{\max}$$

Per valori di s superiori, $|C(s)| < 0.5$, e quindi i campi nei punti x ed $x-s$ sono scorrelati.

Per una regione di area fissata attorno all'utente che trasmette verso la RBS, l'angolo θ_{\max} decresce con la distanza R dall'utente, e quindi il valore di s per avere segnali scorrelati aumenta, essendo $s = \lambda / 2\theta_{\max}$.

Esempio:

$R = 2\text{Km}$, regione scattering 100m attorno utente $\rightarrow \theta_{\max} = 1.4^\circ \rightarrow s = 10\lambda$.
Se R aumenta a 4Km , s sarà più che raddoppiata.

Correlazione del Fast Fading: Uplink

Se la direzione di puntamento dell'antenna (rispetto alla direzione di spostamento s) è indicata dal generico angolo α , le onde arriveranno dalle direzioni per cui la stazione “vede” la cella, che posso considerare comprese in un intervallo $[\alpha - \theta_m, \alpha + \theta_m]$, quindi solo in un settore angolare.

$$C(s) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\alpha - \theta_m}^{\alpha + \theta_m} e^{-jk \cdot s \cdot \sin \theta} d\theta \cong \text{sinc}(ks \sin \alpha \cdot \sin \theta_m)$$

La funzione di correlazione ha il suo primo zero quando:

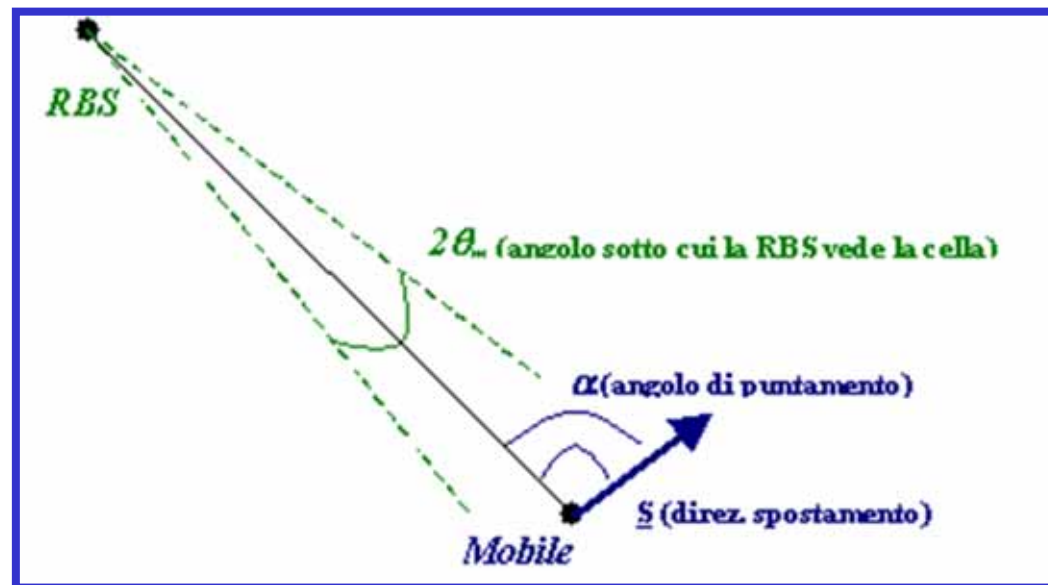
$$ks \sin \alpha \cdot \sin \theta_m = \pi \longrightarrow s = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha \sin \theta_m}$$

Quanto più α è prossimo a 90° , tanto più piccolo è il valore di s tra punti non correlati. Infatti se ci si sposta molto gli angoli di arrivo tendono a coincidere con variazioni di distanza più grandi.

Correlazione del Fast Fading: Uplink

Più è grande l'angolo θ_m più è piccola la distanza per la scorrelazione (se tutte le onde arrivano da una direzione, o quasi, ci si deve spostare molto per avere punti scorrelati).

Quando le direzioni di arrivo provengono da diversi angoli, è più probabile che le direzioni siano scorrelate.



Correlazione del Fast Fading: Uplink

Per una RBS con angolo di puntamento 90° e con angolo di arrivo 120° , cioè $\theta_m = 60^\circ$ (tre antenne per coprire 360° , configurazione tipica), il valore di s è circa 0.6λ e aumenta per θ_m più piccoli.

Sono quindi sufficienti un paio di lunghezze d'onda per considerare i segnali ricevuti incorrelati a causa del fading.

A 900MHz due lunghezze d'onda corrispondono a 60cm.

Quindi, a livello di stazione radio-base, si hanno a disposizione più segnali tra loro incorrelati.

Posizionando due antenne alla distanza di un metro sulla RBS, il segnale che ognuna di esse riceve è scorrelato da quello ricevuto dall'altra (diversity spaziale).

Diversity Spaziale

Ricevendo più segnali, li posso elaborare insieme per ridurre la variazione dovuta al fading.

La tecnica più semplice (diversità nello spazio), consiste nello scegliere, tra due segnali ricevuti fra loro indipendenti X e Y , un segnale $Z = \max(X, Y)$.

Dal punto di vista probabilistico, è difficile che contemporaneamente X ed Y siano entrambi molto piccoli, mentre di solito uno dei due segnali è sempre molto maggiore del secondo.

Il segnale Z sarà dunque molto piccolo, e darà un fuori servizio, solo per percentuali di tempo molto più basse di quelle che si avrebbero ricevendo il solo segnale X .

Per avere un fuori servizio con la diversity devono essere piccoli contemporaneamente sia X che Y , ed essendo X e Y indipendenti la probabilità che siano entrambi piccoli è il prodotto della probabilità che lo siano separatamente.

Diversity Spaziale

La presenza di fading in un canale comunicativo può essere quindi combattuta utilizzando la tecnica detta “trasmissione in diversità”, in cui si utilizzano due o più canali indipendenti di comunicazione, scegliendo quello col miglior rapporto S/N.

Valutiamo, nel caso di due canali, teoricamente uguali, il guadagno dovuto alla tecnica della diversità.

Siano X e Y le variabili aleatorie positive in uscita dai due canali (per ipotesi X e Y sono indipendenti), con pdf nota f_S .

Si vuole valutare la pdf f_M della variabile aleatoria:

$$M = \max(X, Y)$$

e quindi il guadagno ottenibile nell'utilizzare M al posto di X .

Diversity Spaziale

Per definizione la CDF della variabile aleatoria M risulta (essendo le variabili aleatorie X ed Y indipendenti per ipotesi):

$$F_M(z) = \iint_{I_Z} f_S(x) \cdot f_S(y) dx dy = \int_0^z f_S(x) dx \int_0^z f_S(y) dy = [F_S(z)]^2$$

per definizione di CDF della variabile aleatoria X.

Nel caso in cui le due variabili aleatorie non siano indipendenti, bisognerebbe conoscere la loro pdf congiunta $f_{XY}(x,y)$, e non $f_S(x) \cdot f_S(y)$, nella CDF della variabile aleatoria M.

Se X (e quindi Y) è una v.a. di Rayleigh (ampiezza del segnale), allora:

$$f_S(x) = \frac{x}{\rho^2} e^{-\frac{x^2}{2\rho^2}} \rightarrow F_S(z) = \int_0^z f_S(x) dx = \int_0^z \frac{x}{\rho^2} e^{-\frac{x^2}{2\rho^2}} dx = 1 - e^{-\frac{z^2}{2\rho^2}}$$

Diversity Spaziale

Se invece X (e quindi Y) è una v.a. esponenziale (potenza del segnale), allora:

$$f(x) = \frac{1}{\rho} e^{-\frac{x}{\rho}} \rightarrow F(z) = \int_0^z f(x) dx = \int_0^z \frac{1}{\rho} e^{-\frac{x}{\rho}} dx = 1 - e^{-\frac{z}{\rho}}$$

La pdf è (per definizione) la derivata della CDF, e quindi, nel nostro caso, in cui la CDF di M è pari a $F_M(z) = [F_S(z)]^2$, la pdf di M vale:

$$f_M(z) = \frac{d}{dz} [F_M(z)] = \frac{d}{dz} [F_S(z) \cdot F_S(z)] = 2 \cdot F_S(z) \cdot \frac{d}{dz} [F_S(z)] = 2 \cdot F_S(z) \cdot f_S(z)$$

Quindi:

$$f_M(z) = 2 \cdot F(z) \cdot f(z) = \begin{cases} 2 \cdot \left[1 - e^{-\frac{z^2}{2\rho^2}} \right] \cdot \left[\frac{z}{\rho^2} e^{-\frac{z^2}{2\rho^2}} \right] & \text{per v.a. Rayleigh} \\ 2 \cdot \left[1 - e^{-\frac{z}{\rho}} \right] \cdot \left[\frac{1}{\rho} e^{-\frac{z}{\rho}} \right] & \text{per v.a. esponenziale} \end{cases}$$

Diversity Spaziale: Probabilità di Fuori Servizio

La probabilità di superare una data ampiezza z_0 di segnale risulta, in assenza di diversità:

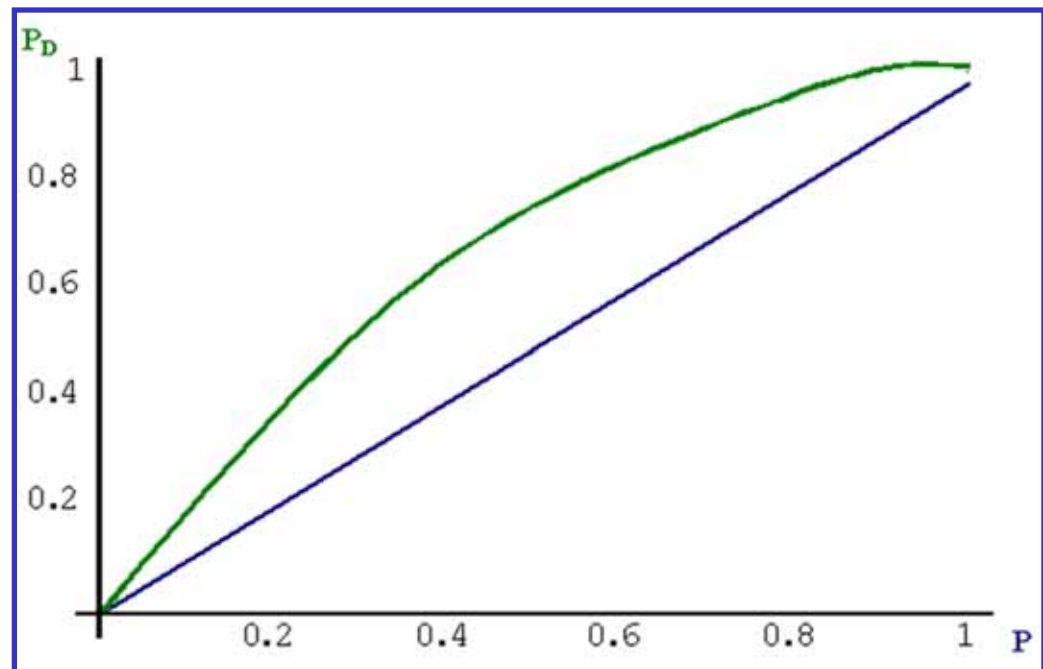
$$P = P_r(X > z_0) = 1 - F_S(z_0)$$

In presenza di diversità si ha invece:

$$P_D = P_r(M > z_0) = 1 - [F_M(z_0)] = 1 - [F_S(z_0)]^2 = 1 - [1 - P]^2 = P \cdot (2 - P)$$

e si ha sempre $P_D > P$.

Il rapporto P_D/P risulta anzi tanto più grande quanto più P è piccola.



Diversity Spaziale: Probabilità di Fuori Servizio

Per valutare quantitativamente l'effetto della diversità, si definisce:

➤ **Diversity Gain**: rapporto fra le potenze di uscita garantite in presenza e assenza di diversità, per una data affidabilità (per una data frazione di tempo). E' un indice di quanto la potenza di uscita aumenta in presenza di diversità, una volta che si è fissata l'affidabilità del collegamento, ossia la percentuale di tempo in cui il collegamento deve essere garantito.

➤ **Diversity Advantage**: rapporto fra le percentuali di tempo per cui un dato livello viene superato, con e senza diversità. E' un indice di quanto si riduce il tempo di fuori servizio mediante l'utilizzo della diversity. Ad es.: un vantaggio di 10, significa che con diversity ci si aspetta un'assenza di servizio per un tempo che è $1/10$ che se non si usasse la diversity. Se l'affidabilità passasse da 99% a 99.9% l'incremento del tempo di servizio non sarebbe percepibile, ma il tempo di fuori servizio si ridurrebbe di 10 volte.

Diversity Spaziale: Probabilità di Fuori Servizio

Per il fast fading il segnale X ha una distribuzione di Rayleigh (o di Rice, a seconda dei casi), con:

MEDIA: $\bar{X} = \rho \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1.25\rho$

MEDIANA: $X_m = \sqrt{2} \cdot \rho \cdot \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-1} = 0.98\rho$

La profondità del fading può essere valutata come il livello che non viene superato solo con una probabilità P_L (tipicamente 1% - 0.1%).

Se X_L è il valore corrispondente a P_L , si ha:

$$F_S(X_L) = P_L = 1 - e^{-\frac{X_L^2}{2\rho^2}} \longrightarrow e^{-\frac{X_L^2}{2\rho^2}} = 1 - P_L \longrightarrow X_L = \sqrt{2} \cdot \rho \cdot \sqrt{\ln(1 - P_L)^{-1}}$$

Diversity Spaziale: Probabilità di Fuori Servizio

Essendo P_L piccola, segue che:

$$\ln(1 - P_L) \cong -P_L - \frac{P_L^2}{2} \quad \rightarrow \quad X_L = \sqrt{2} \cdot \rho \cdot \sqrt{P_L \left(1 - \frac{P_L}{2}\right)}$$

Esempio:

$P_L = 1\% \rightarrow X_L = 0.141\rho$ ovvero 17 dB sotto la mediana

$$X_{mdB} = 20\log_{10}(0.98\rho) = 20\log_{10}(0.98) + 20\log_{10}(\rho) = 0 + \rho_{dB}$$

$$X_{LdB} = 20\log_{10}(0.141\rho) = 20\log_{10}(0.141) + 20\log_{10}(\rho) = -17 + \rho_{dB}$$

Diversity Spaziale: Probabilità di Fuori Servizio

Utilizzando la diversità, il livello X_{LD} che non viene superato solo con probabilità P_L risulta:

$$F_M(X_{LD}) = P_L$$

ma in questo caso $F_M(z)=[F_S(z)]^2$, quindi:

$$F_M(X_{LD}) = P_L \longrightarrow F_S(X_{LD}) = \sqrt{P_L}$$

$$X_{LD} = \sqrt{2} \cdot \rho \cdot \sqrt{\ln(1 - \sqrt{P_L})^{-1}} \cong \sqrt{2} \cdot \rho \cdot \sqrt{\sqrt{P_L} \left(1 - \frac{\sqrt{P_L}}{2}\right)}$$

La precedente, per $P_L=1\%$, fornisce $X_{LD}=0.44\rho$.

Diversity Spaziale: Probabilità di Fuori Servizio

Il diversità gain è quindi 10 dB, essendo:

$$X_{LD_dB} = 20\log_{10}(0.44\rho) = 20\log_{10}(0.44) + 20\log_{10}(\rho) = -7 + \rho_{dB}$$

$$\text{Diversity_Gain}_{dB} = X_{LD_dB} - X_{LdB} = (-7 \text{ dB} + \rho_{dB}) - (-17 \text{ dB} + \rho_{dB}) = 10 \text{ dB}$$

Si noti che al ridursi dei livelli interessati (ad esempio per P_L inferiore) il diversity gain, dato da (per $P_L \ll 1$):

$$G_D = \frac{X_{LD}}{X_L} \cong \sqrt{\frac{1}{\sqrt{P_L}} \cdot \frac{\left(1 - \frac{\sqrt{P_L}}{2}\right)}{\left(1 - \frac{P_L}{2}\right)}} \cong \sqrt{\frac{1}{\sqrt{P_L}} - \frac{1}{2}}$$

$$G_{D_dB} = X_{LD_dB} - X_{L_dB} = 20\log_{10}(X_{LD}) - 20\log_{10}(X_L) \cong 20\log_{10}\left(\sqrt{\frac{1}{\sqrt{P_L}} - \frac{1}{2}}\right)$$

aumenta.

Diversity Spaziale: Probabilità di Fuori Servizio

Valutiamo il diversity advantage per un livello 6 dB sotto la mediana:

$X_A = 0.5 \rho$ (essendo la mediana $X_m = 0.98\rho$, 6 dB sotto la mediana corrispondono alla metà del suo valore, ossia a $0.5 X_m \cong 0.5 \rho$)

In assenza di diversity la percentuale di non superamento P_L vale:

$$P_L = F_S(X_A) = 1 - e^{-\frac{X_A^2}{2\rho^2}} = 1 - e^{-\frac{(\rho/2)^2}{2\rho^2}} = 1 - e^{-\frac{1}{8}} = 11.7\%$$

In presenza di diversity si ha invece:

$$P_{LD} = F_M(X_A) = [F_S(X_A)]^2 = \left(1 - e^{-\frac{1}{8}}\right)^2 = 1.38\%$$

con un diversity advantage di 8.5 (il servizio è sospeso per un tempo 8.5 volte più piccolo).

Il diversity advantage $A_D = P_L/P_D = 1/P_L$ aumenta al ridursi di X_A (e quindi di P_L)